**Олимпиада**
**школьников по математике**
**«ТИИМ-2024»**
**Заключительный тур**
**11 февраля 2024 года**
**11 класс (Азия)**

▷ **1.** Найдите две последние цифры числа $a_{2024}$, где $a_k = 9^{a_{k-1}}, a_1 = 9$.

**Решение:** Выпишем последние две цифры первых десяти степеней числа 9. $9^1 = ...09, 9^2 = ...81, 9^3 = ...29, 9^4 = ...61, 9^5 = ...49, 9^6 = ...41, 9^7 = ...69, 9^8 = ...21, 9^9 = ...89, 9^{10} = ...01$.
Число $9^9 = a_2$ оканчивается цифрой 9, т. е. $9^9 = 10k + 9$.
Следовательно, $a_3 = 9^{9^9} = 9^{10k+9} = (9^{10})^k \cdot 9^9 = (...01)^k \cdot (...89) = ...89$.

▷ **2.** Решите уравнение: $4x + 3y - 2x\{\frac{x^2+y^2}{x^2}\} = 0$, где $\{x\}$ – дробная часть числа $x$.

**Решение:** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $\frac{x}{y} = t$
$2 + \frac{3}{2}t = \{1 + t^2\}$
$\{x + n\} = \{x\}$
$\{t^2\} = 2 + \frac{3}{2}t, 0 \leqslant 2 + \frac{3}{2}t < 1, -\frac{4}{3} \leqslant t < -\frac{2}{3}$
$\frac{4}{9} < t^2 \leqslant 1\frac{7}{9}$

1)$\frac{4}{9} < t^2 < 1$
$\{t^2\} = t^2, t \in (-1; -\frac{2}{3})$
2)$1 \leqslant t^2 \leqslant \frac{16}{9}$
$\{t^2\} = t^2, t \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$

1)$t^2 - \frac{3}{2}t - 2 = 0$
$t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 2} = \frac{3+\sqrt{41}}{4} \notin (-1; -\frac{2}{3})$
$t_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4} \in (-1; -\frac{2}{3})$

2)$t^2 - \frac{3}{2}t - 3 = 0$
$t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 3} = \frac{3+\sqrt{57}}{4} \notin \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$
$t_2 = \frac{3-\sqrt{57}}{4} \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$
**Ответ:** $\{\frac{3-\sqrt{57}}{4}; \frac{3-\sqrt{41}}{4}\}$.

▷ **3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2000 отрицательных. Сколько из исходных чисел равны 0?

**Решение:** Пусть среди написанных чисел $x$ положительных и $y$ отрицательных. ( $x, y$ — натуральные числа $x + y \leqslant 100$).

Так как отрицательные произведения возникают только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно $xy$ отрицательных.

Имеем $xy = 2000$. Тогда наибольшее из чисел $x$ и $y$ не превосходит $\sqrt{2000}$, т. е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, поэтому в его разложении на простые множители присутствуют только числа 2 и 5, причём 2 в степени не больше, чем 4.

Легко видеть, что такими числами лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 50 и 100.

Из уравнения $xy = 2000$ находим, что второе число при этом будет равняться 20 или 1. Пара (100;1) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 50 отрицательных чисел, и 20 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 70, а поэтому среди исходных чисел ровно 30 нулевых.

▷ **4.** Даны три утверждения:
1) неравенство $x^2 + x + a \geqslant 0$ справедливо при всех действительных $x$;
2) функция $y = log_{2a}x$ является монотонно убывающей;
3) система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 3a + 2, \\ y + acosx = 2 \end{cases}$
имеет единственное решение.
Найдите все значения параметра $a$, при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

**Решение:** Условие 1) выполняется при $a \geqslant \frac{1}{4}$;
условие 2) выполняется при $0 < a < \frac{1}{2}$
условие 3) верно при $a = 1$.
**Ответ:** $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

▷ **5.** Десять простых чисел составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа, если $a_1 < 200$ и $a_{10} < 3000$.

**Решение:** Очевидно, что разность прогрессии $d$ число чётное, так как простые числа – числа нечётные (кроме 2).

Далее, $d$ кратно 3, так как в противном случае один из трёх последовательных членов прогрессии будет делиться на 3.

Аналогично убеждаемся, что d должно быть кратно 5 и 7 и, следовательно, кратно $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Итак, $d = 210k$. Но по условию: $a_{10} = a_1 + 9d < 3000$
$a_1 + 1890k < 3000$,
$k < \frac{3000-a_1}{1890} < 2$.

Значит, $k = 1$ и $d = 210$. Остаётся определить $a_1$. Имеем: $210 = 11 \cdot 19 + 1$

и $a_n = a_1 + 210(n-1) = a_1 + 11 \cdot 19(n-1) + n - 1$ Отсюда легко вывести, что $a_1$ или равно 11, или имеет вид 22k+1. Действительно, пусть $a_1 = 22k \pm r$, где $1 < r < 11$. Тогда среди чисел: 1, 2, 3,...,9 всегда найдётся число m, которое в сумме с r даст число 11 и, следовательно, число $a_m$ будет кратно 11. Итак, испытанию подлежат числа: 11, 23, 67, 89, 199 (1) (так как 45, 111, 133, 155 и 177 – числа составные).

Но при $a_1 = 11$ имеем $a_9 = 11 \cdot 89$;
$a_1 = 23 - a_6 = 29 \cdot 37$;
$a_1 = 67 - a_{10} = 19 \cdot 103$;
$a_1 = 89 - a_7 = 19 \cdot 71$.

Остаётся число 199, которое даёт прогрессию из 20 чисел: 199; 409; 619; 821; 1039; 1249; 1459; 1669; 1879; 2089. Легко убедиться, что все эти числа являются простыми.

▷ **6.** Дан отрезок, длина которого равна
$(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.
С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[1024]{2024}$.

**Решение:** Преобразуем данное выражение
$\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+3\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)} = 1.$
$l_0 = 1 \Rightarrow 2024 = l_1, l_n = \sqrt{l_0 \cdot l_{n-1}}, 1024 = 2^{10}$
Метод математической индукции:
$l_2 = \sqrt{l_0 \cdot l_1} = 2024^{\frac{1}{2}}$
$l_3 = \sqrt{1 \cdot 2024^{\frac{1}{2}}} = 2024^{\frac{1}{2^2}}$
$l_4 = \sqrt{l_0 \cdot l_3} = 2024^{\frac{1}{2^3}}$
$l_5 = \sqrt{l_0 \cdot l_4} = 2024^{\frac{1}{2^4}}$
...
$l_{11} = \sqrt{l_0 \cdot l_{10}} = 2024^{\frac{1}{2^{10}}} = 2024^{\frac{1}{1024}} = \sqrt[1024]{2024}$

▷ **7.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:
а) в порядке убывания слева направо;
б) в порядке неубывания слева направо.
Считать, что числа не могут начинаться с цифры 0.

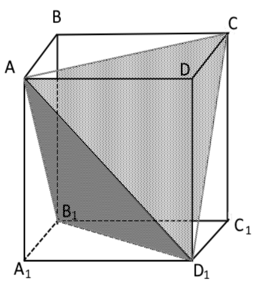
**Решение:** а) Пусть событие $A$ — получение трёхзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо. Общее количество трёхзначных чисел $N$ равно количеству чисел от 100 до 999. Поэтому $N = 999 - 100 + 1 = 900$. Любые 3 различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр: 0,1,...,8,9 — можно единственным образом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприпятствующих событию $A$ исходов: $M_1 = \frac{10!}{7!3!} = 120$

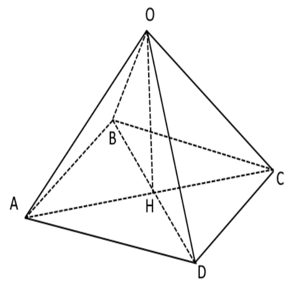
Следовательно:
$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{120}{900} = \frac{4}{30}$
б) Пусть событие $C$ — полученные трёхзначного числа, цифры которого расположены в порядке неубывания слева направо (например, 122, 113, 222 и т. д.). Число исходов, благоприпятствующих событию , обозначим через $_3$.
Найдём $_3$ двумя способами.
Первый способ нахождения $_3$:
Число $_3$ будем вычислять по формуле:
$_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, где $L_1$ — количество трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке возрастания (например, 134, 256 и т. д.); $L_2$ — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры в записи числа одинаковы( например, 111, 222....,999); $L_3$ — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём первые 2 цифры одинаковы (например, 114, 556, и т. д.); $L_4$ - количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём последние 2 цифры одинаковы (например, 133, 266, и т. д.).
Очевидно, $L_1$ равно числу вариантов извлечения любых трёх различных цифр из следующих девяти: 1, 2, ...,8,9 (в записи таких чисел нельзя использовать 0). Поэтому $L_1 = 84$
$L_2 = 9$, так как имеется только 9 трёхзначных чисел с одинаковыми цифрами (111; 222;...;999.)
Найдём $L_3$ перебором. Рассмотрим все трёхзначные числа, у которых цифры расположены в порядке неубывания, причём первые 2 цифры — 1. Очевидно, их количество равно 8:
112,113,114,... 119 – всего 8 чисел.
Аналогично рассуждая, можно записать:
223, 224,225,...,229 – всего 7 чисел.
334,335,336,...,339 – всего 6 чисел.
...
889 — 1 число.
Поэтому $L_3$ = 8+7+6+...+1=36.
Найдём $L_4$ - количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в порядке неубывания, причём последние цифры одинаковы.
Очевидно, что количество таких чисел, заканчивающихся двумя цифрами 2, равно 1:
122 — 1 число.
Аналогично рассуждая, можно записать:
133, 233 — 2 числа.
144, 244, 344 — 3 числа.
...
199, 299, 399,...,899 — 8 чисел.
Тогда $L_4$ = 1+2+3+...+8=36.
Получаем
$_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$=84+9+36+36 = 165.

$P(C) = \frac{165}{900} = \frac{11}{60} = 0,1833.$

▷ **8.** Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

**Решение:** Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $a$ на части, из которых можно составить две пирамиды. Достаточно заметить, что тетраэрд $ACB_1D_1$ — правильный с ребром $\sqrt{2}a$, а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной $O$ провести высоту $OH$ и разрезать пирамиду плоскостями $OHA$ и $OHB$ на 4 одинаковые части. Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $\frac{1}{\sqrt{2}}$.




▷ **9.** Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равно разности между квадратом третьего и числа $\frac{4}{5}$. Найдите произведение этих чисел.

**Решение:** Пусть $a, b, c$ — заданные числа. По условию имеем систему равенств:
$a^3 + b^3 = c^2 - \frac{4}{5}, b^3 + c^3 = a^2 - \frac{4}{5}, a^3 + c^3 = b^2 - \frac{4}{5}.$ (1)
Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - c^3 = c^2 - a^2$.
Сокращая на $(a - c)$, по условию $a \neq c$, получаем $a^2 + ac + c^2 = -(a + c)$.
Аналогично можно заключить, что $b^2+ab+a^2 = -(a+b)$ и $b^2+bc+c^2 = -(b+c)$, т. е. $a^2 + ac + c^2 = -(a + c), b^2 + ab + a^2 = -(a + b), b^2 + bc + c^2 = -(b + c)$. (2)
Поэтому $(a^2+ac+c^2)\check{}(b^2+bc+c^2) = (b+c)\check{}(a+c)$, откуда $(a^2-b^2)+c(a-b) = -(a - b)$. Сокращая на $(a - b)$, по условию $a \neq b$, получаем $a + b + c = -1$. (3)
Складываем все три равенства (2), получим $2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ac) = -2(a + b + c), 2(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 2$.
Откуда (см (3)):
$ab + bc + ac = 0$. (4)
Далее возведём в куб обе части равенства (3): $-1 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) + 6abc(5)$
Заметим, что $(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2) = (a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc = 0 - 3abc = -3abc.$
Далее, складывая все три равенства (1), получим
$2(a^3 + b^3 + c^3) = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{12}{5} = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - \frac{12}{5} = (-1)^2 - 2 * 0 - \frac{12}{5} = 1 - \frac{12}{5} = -\frac{7}{5}$, откуда $a^3 + b^3 + c^3 = -\frac{7}{10}$.
Тогда равенство (5) принимает вид: $-1 = -\frac{7}{10} + 3(-3abc) + 6abc = -\frac{7}{10} - 3abc.$
Тогда $3abc = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$.
Следовательно, $abc = \frac{1}{10}$.
Замечание. Можно доказать с помощью производной, что тройка различных действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, в самом деле сещуствует и определена однозначно, как три корня уравнения $x^3 + x^2 - \frac{1}{10} = 0$.

▷ **10.** Найдите, по крайней мере, один набор семи различных целых чисел, отличных от нуля, таких, что сумма их кубов равняется следующему 14-значному числу $N = 16781934923776$.

**Решение:** Проанализируем число $N$: $3776 = 16 \cdot 236$

$\Rightarrow N \vdots 16$
$S_1 = 1 + 7 + 1 + 3 + 9 + 3 + 7 = 31$
$S_2 = 6 + 8 + 9 + 4 + 2 + 7 + 6 + 42$

$S_1 - S_2 = 11 \Rightarrow N \vdots 11 \Rightarrow N \vdots 176$

$16781934923776 \vdots\ 176 = 95351902976$
$N = 176 \cdot 95351902976 = 176 \cdot N_1$

$N_1 \vdots 16, (2976 = 16 \cdot 186)$

$N_1 \vdots 11, S_1 = 9 + 3 + 1 + 0 + 9 + 6 = 28$
$S_2 = 5 + 5 + 9 + 2 + 7 = 28$
95351902976:176= 54177217

$N_2 = 54177217$
$N = 176^2 \cdot N_2 = 176^3 \cdot 3078251 = 176^3 \cdot 11 \cdot 279841$

$279841 \vdots 11$
2+9+4=15
7+8+1=16

$279841 \vdots 13; 17; 19$
$279841 = 23 \cdot 12167 = 23^2 \cdot 529 = 23^4$

$N = (11 \cdot 16)^3 \cdot 11 \cdot 23^4 = 16^3 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 8^4 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 2024^4$

$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 2024^4$
$n_k = d_k \cdot 2024$
$d = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$
$\Rightarrow d^3 = [1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000]$
$d_1 = 10, d_2 = 9, d_3 = 8 \Rightarrow d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 = 2241$
$d_4 = 5, d_5 = 4, d_6 = 3, d_7 = 1 \Rightarrow d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 = 217$
$d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + (-d_4)^3 + (-d_5)^3 + (-d_6)^3 + (-d_7)^3 = 2024.$